Ορισμός 4.0.0.14 *Ένα υποσύνολο A ενός τοπολογικού χώρου X καλείται* **συνεκτικό**, *αν είναι ταυτόχρονα ανοικτό και κλειστό. Δηλαδή δεν μπορεί να γραφεί σαν ξένη ένωση* δύο *ανοικτών υποσυνόλων.* π.χ. $\mathbb{R}$ συνεκτικός

$\mathbb{R}^*$ όχι συνεκτικός, έχει 2 συνιστώσες

Θεώρημα 4.0.0.15 *Έστω O μία συνεκτική τοπολογική ομάδα και H υποομάδα η οποία περιέχει μια ανοικτή περιοχή του ταυτοτικού στοιχείου, τότε $O = H$.*

Ορισμός 4.0.0.16 *Το $A \subseteq \mathbb{R}^n$ θα καλείται* **τροχιακά συνεκτικό**, *αν για κάθε $v, u \in A$ υπάρχει $\alpha : [0,1] \to A$ συνεχής ώστε $\alpha(0) = v$ και $\alpha(1) = u$.* και α συνεχής

τροχιά

Λήμμα 4.0.0.17 *Η συνεχής εικόνα τροχιακά συνεκτικού υποσυνόλου είναι επίσης τροχιακά συνεκτικό υποσύνολο. Το ίδιο ισχύει και για συνεκτικό υποσύνολο.*

Παράδειγμα 4.0.0.18 *Η απεικόνιση της ορίζουσας $det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ είναι συνεχής επιμορφισμός μεταξύ τοπολογικών ομάδων. Συνεπώς η $GL_n(\mathbb{R})$ δεν είναι συνεκτικός τοπολογικός χώρος.*

Θεώρημα 4.0.0.19 *Η συνεκτική συνιστώσα του ταυτοτικού στοιχείου μιας τοπολογικής ομάδας είναι υποομάδα.*

Ορισμός 4.0.0.20 *Ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται* **φραγμένο**, *αν υπάρχει στοιχείο v και αριθμός $\varepsilon > 0$ ώστε $A \subseteq B(v, \varepsilon)$.*

αν $\exists r>0$ ώστε $A \subseteq B_r(0)$

Ορισμός 4.0.0.21 *Ένα υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται* **συμπαγές**, *αν είναι κλειστό και φραγμένο.* Αν κάθε ανοιχτό κάλυμμα του X έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα (Γενικός ορισμός)

Λήμμα 4.0.0.22 *Η συνεχής εικόνα συμπαγούς υποσυνόλου είναι επίσης συμπαγές υποσύνολο.*

4.1 Ασκήσεις

1) Έστω $det : M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ η απεικόνιση της ορίζουσας.

α) Δείξτε ότι το σύνολο $GL_n(\mathbb{R})$ είναι ανοικτό υποσύνολο.

β) Δείξτε ότι το σύνολο $GL_n(\mathbb{R})$ έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες.

γ) Δείξτε ότι ο περιορισμός της det στο $GL_n(\mathbb{R})$ και $\mathbb{R}^*$ είναι συνεχής επιμορφισμός ομάδων.

δ) Δείξτε ότι το σύνολο $SL_n(\mathbb{R})$ είναι κλειστό υποσύνολο.

ε) Δείξτε ότι η υποομάδα $SL_n(\mathbb{R})$ είναι κανονική στην $GL_n(\mathbb{R})$.

στ) Δείξτε τον ισομορφισμό τοπολογικών ομάδων

$$GL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^*.$$

ζ) Δείξτε ότι το σύνολο $GL_n(\mathbb{R})$ δεν είναι συμπαγές.

η) Δείξτε ότι το σύνολο $SL_n(\mathbb{R})$ δεν είναι συμπαγές.

ϑ) Δείξτε ότι η υποομάδα $SO(n)$ είναι κανονική στην $O(n)$.

ι) Δείξτε ότι το σύνολο $O(n)$ είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο, άρα συμπαγές.

2α) Έστω $A \in O(n)$ τότε ορίζεται η απεικόνιση

$$\varphi_A : S^{n-1} \to S^{n-1}$$

με τύπο $\varphi_A(u) = uA$. Δείξτε ότι είναι συνεχής.

β) Δείξτε ότι υπάρχει μια δράση της $O(n)$ στην S^{n-1}

$$O(n) \times S^{n-1} \to S^{n-1}.$$

ΔΡΑΣΗ : G ομάδα (όχι απαρ. τοπ.) και ένα σύνολο X
$G \times X \to X$
Δηλ. $(g, x) \mapsto gx$
Αν $g = 1$ τότε $(1, x) \mapsto x$.

Να βρεθούν τα στοιχεία της $O(n)$ τα οποία αφήνουν το $(0, \cdots, 0, 1)$ αναλλοίωτο. Δείξτε ότι είναι υποομάδα.

γ) Δείξτε ότι το προηγούμενο σύνολο είναι ισόμορφο με την $O(n-1)$.

δ) Δείξτε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός $O(n)/O(n-1) \cong S^{n-1}$.

3α) Με

$$B_+(n, \mathbb{R}) = A = (a_{i,j}) \in GL_n(\mathbb{R}) \mid a_{i,i} > 0, a_{i,j} = 0, i > j\}$$

συμβολίζουμε τη θετική υποομάδα του Borel. Δηλαδή τους άνω τριγωνικούς πίνακες με θετικά στοιχεία στην κύρια διαγώνιο. Δείξτε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός

$$B_+(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n(n+1)/2}.$$

β) Έστω $SB_+(n, \mathbb{R}) = B_+(n, \mathbb{R}) \cap SL_n(\mathbb{R})$. Δείξτε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός

$$SB_+(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{(n^2+n-2)/2}.$$

γ) $B_+(n, \mathbb{R}) \cap O(n) = \{\pm I\}$.

4) Δείξτε ότι υπάρχει ομοιομορφισμός

$$GL_n(\mathbb{R}) \cong O(n) \times \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$$

τοπολογικών χώρων αλλά όχι ομάδων.

ΟΡΙΣΜΟΣ (Μετά απο το 4.0.0.15)

O τοπολογική ομάδα και $a \in O$

Ορίζεται η $\lambda a : O \to O$ με τύπο $\lambda a(b) = ab$

Η λa είναι συνεχής, 1-1, επί και η αντίστροφη είναι συνεχής

$\lambda a^{-1} : O \to O$ $\lambda a^{-1} = \lambda a^{-1}$

Η λa είναι ομοιομορφισμός ($\simeq$) και δεν έχει σταθερά σημεία

για $a \neq$ ταυτοτικού 1_O

$\lambda a : O \to O$ $\lambda a(1_O) = a$

- Έστω U ανοιχτή περιοχή του 1_O

$\lambda a(U) = aU$ είναι ανοιχτή περιοχή του a, ομοιομορφική με το U. Δηλ., οι ανοιχτές περιοχές στο 1_O μιας ομάδας είναι ίδιες με τις ανοιχτές περιοχές στο 1_O σε ένα σημείο

Άρα τοπικά, μια τοπολογική ομάδα χαρακτηρίζεται από τα ανοιχτά σύνολα του ταυτοτικού 1_O, και για τη μελέτη τους αρκεί να μελετηθούν στο ταυτοτικό σημείο

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.0.0.15.

Αν ξεχάσω το "ανοιχτή περιοχή", τότε $O \neq H$, καθώς το ταυτοτικό στοιχείο $\{1_O\}$ είναι κλειστό.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ 4.0.0.15.

- Έστω $H \lneq O \Rightarrow O = \bigsqcup_a aH$ ξένη ένωση συμπλόκων. Αρκεί αυτά να είναι ανοιχτά. Τότε η O δεν θα ήταν συνεκτική. Έστω U ανοιχτή περιοχή του $1_O \subseteq H$. $aU \subseteq aH$ ανοιχτό (καθώς U ανοιχτό)

Άρα $\forall$ στοιχείο $b \in aU$ βρίσκουμε ανοιχτή περιοχή $b \in V \subseteq aU$.

Άρα $b = ah$ με $h \in H \Rightarrow baU \in aH$ Ανοιχτό

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.0.0.16

- $\exists$ τ.χ οι οποίοι είναι συνεκτικοί, αλλά όχι τροχιακά συνεκτικοί

- Τροχιακά συνεκτικός $\Longrightarrow$ Συνεκτικός

Αν δεν ήταν συνεκτικός, τότε θα $\exists$ 2 σύνολα ξένα μεταξύ τους που περιέχουν ένα σημείο. Αλλά, τότε θα $\exists$ τροχιά που να τα ενώνει. Αλλά η τροχιά δεν θα ήταν συνεχής

Αποδειξη 4.0.0.17

Αν $f: X \to Y$ συνεχής και X συνεκτικός, τότε και $f(X)$ συνεκτικό υποσύνολο του Y. Έστω $f(X) = A \cup B$ με $A \cap B = \emptyset$ και $A, B \subseteq Y$ ανοιχτό. Τότε $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

ανοικτά και ξένα. Άτοπο.

Παραδειγμα 4.0.0.18

Συνεχής, επειδή $+, \circ$ συνεχείς απεικονίσεις, καθώς $GL_n(\mathbb{R})$ και $GL_n(\mathbb{R})$ και $\mathbb{R}^*$ τοπολογικές ομάδες, $(\mathbb{R}^*, \circ)$ ομάδες και οι πράξεις $+, \circ$ συνεχείς άρα τοπ. ομάδες

Είναι επιμορφισμός. Δεν είναι 1-1!

$\det(AB) = \det A \det B$, άρα ομομορφισμός.

Άρα οι $GL_n(\mathbb{R})$ δεν είναι συνεκτικοί χώροι

Αν ήταν και η εικόνα θα ητάν συνεκτικός, αλλά $\mathbb{R}^*$ μη συνεκτικό

Αποδειξη 4.0.0.19.

O τοπ. ομάδα κ' $1_O \in O$.

Συνεκτική συνιστώσα του 1_O, έστω $A_{1_O} \subseteq O$, $1_O \in A_{1_O}$ και A_{1_O} συνεκτικός υποχώρος $\Rightarrow A_{1_O} \leq O$ υποομάδα

συνεκτικοί

$\underbrace{A_{1_O} \times A_{1_O}}_{\text{καρτεσιανό γινόμενο συνεκτικό}} \longrightarrow O$ άρα εικόνα συνεκτική

Η εικόνα αυτής της απεικόνισης είναι συνεκτική και περιέχει το 1_O

$(a,b) \mapsto ab^{-1}$ συνεχής απεικόνιση

$(1_O, 1_O) \mapsto 1_O$

Επομένως, $A_{1_O} \leq O$

4.0.0.21

Συμπληρωματικοί Ορισμοί

- Έστω $A = \{U_i \subseteq X$ ανοιχτό και $i \in I\}$, το A καλείται ανοιχτό κάλυμμα αν $X = \bigcup_{i \in I} U_i$
- Το A έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα αν $\exists n \in \mathbb{N}$ με $B = \{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_n} \mid U_{i_t} \in A\}$ και $X = \bigcup_{t=1}^{n} U_{i_t}$.

Απόδειξη 4.0.0.22.

Έστω $f: X \to Y$ συνεχής και X συμπαγής.

Θέλουμε $f(x)$ συμπαγές στον X

Έστω A τυχαίο ανοιχτό κάλυμμα του X.

$A = \{U_i \mid i \in I\}$. Το $A' = \{U_i \cap f(x) \mid i \in I\}$ αποτελεί ανοιχτό κάλυμμα του $f(x)$.

Τότε $B = \{f^{-1}(U_i \cap f(x)) \mid i \in I\}$ αποτελεί ανοιχτό κάλυμμα του X

X συμπαγής $\Rightarrow \exists B'$ πεπερασμένο υποσύνολο του B.

Δηλ., $B' = \{f^{-1}(U_{i_1} \cap f(x)), \dots, f^{-1}(U_{i_n} \cap f(x))\}$ όπου

$X = \bigcup_{t=1}^{n} f^{-1}(U_{i_t} \cap f(x)) \Rightarrow f(x) = \bigcup_{t=1}^{n} \underbrace{f(f^{-1}}_{\text{Δεν φεύγει!}}(U_{i_t} \cap f(x))$ πεπερασμένο κάλυμμα του $f(x)$.

Άρα κάθε κάλυμμα του $f(x)$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα.

Ασκηση 1

$\det : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ συνεχής.

$(\mathbb{R}, +)$ ομάδα, $(\mathbb{R}, \cdot)$ όχι ομάδα.

$(M_n(\mathbb{R}), +)$ ομάδα.

Άρα $M_n(\mathbb{R})$ και $\mathbb{R}$ με την $+$, τοπ. ομάδα.

$A \mapsto \det A$ συνεχής

$\det(A+B) \neq \det A + \det B$ όχι ομομορφισμός

$Gl_n(\mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{R})$. Δεν είναι υποομάδα, επειδή:

Μπορώ να πάρω δύο πίνακες π.χ. I και I^{-1} και

θα μου βγάλει τον $\mathbb{O} \notin Gl_n(\mathbb{R})$

$Gl_n(\mathbb{R})$ τοπολ. υπόχωρος

$$\overset{\shortparallel}{\det^{-1}}(\mathbb{R}^*)$$ ανοιχτό καθώς $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ανοιχτό.

Επομένως και $Gl_n(\mathbb{R})$ ανοιχτό.

$\det : Gl_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^* \rightarrow$ δύο συνεκτικές συνιστώσες.

Επομένως και $Gl_n(\mathbb{R})$ έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες

(Έστω ότι έχει 3 συνεκτ. συν. τότε και η εικόνα θα έχει 3 συνεκτ. συν. Άτοπο καθώς $\mathbb{R}^*$ έχει 2 συνεκτ.)

$Gl_n(\mathbb{R})$ ανοιχτό στον $\mathbb{R}^{n^2}$ με δύο συνεκτ. συνιστ.

$Gl_n(\mathbb{R})$ είναι συμπαγές; ΟΧΙ.

Αν ήταν συμπαγές, η εικόνα του θα ήταν συμπαγής, αλλά $\mathbb{R}^*$ όχι φραγμένο.

$\det : Gl_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ συνεχής, επιμορφισμός τοπ. ομάδων καθώς $\det(AB) = \det A \det B$.

$Sl_n(\mathbb{R}) \triangleleft Gl_n(\mathbb{R})$ και $Sl_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}\{1\}$

$\shortparallel$

$\ker \det$, εφόσον είναι πυρήνας, υποχρεωτικά είναι κανονική.

$\{1\}$ κλειστό υποσύνολο, άρα $Sl_n(\mathbb{R})$ κλειστό υποσύνολο της $Gl_n(\mathbb{R})$

$Sl_n(\mathbb{R})$ φραγμένη; ΟΧΙ

Είναι κλειστή.

Έστω $SL_n(\mathbb{R}) \subseteq B_\varepsilon(1, \ldots, 1) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$
c_I

$\nexists \varepsilon: \begin{pmatrix} \varepsilon+1 & & \emptyset \\ & 1 & \\ \emptyset & & \ddots & 1 \end{pmatrix} \notin B_\varepsilon(1, \ldots, 1)$
Αλλά $\in GL_n(\mathbb{R})$

Άρα $SL_n(\mathbb{R})$ όχι φραγμένη.
Επομένως, $SL_n(\mathbb{R})$ δεν είναι συμπαγής.

Άρα από $\det : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$

$GL_n(\mathbb{R}) / SL_n(\mathbb{R})$ λόγω του επιμορφισμού.
$\simeq \mathbb{R}^*$ ισομορφισμός ομάδων.

$\det : O(n) \to \mathbb{R}^*$ συνεχής. Δεν είναι επιμορφισμός, γιατί
π.χ. το 5 δεν μας δίνει ορίζουσα ± 1.
$\det : O(n) \to \{\pm 1\} \leq \mathbb{R}^*$
↳ διακριτή υποομάδα
$SO(n) \leq O(n)$ είναι κανονική;
$SO(n) \trianglelefteq O(n)$ καθώς είναι πυρήνας της ορίζουσας
$\ker \det \{\pm 1\} \Rightarrow O(n)/SO(n) \simeq \{\pm 1\}$.
Άρα $O(n) = SO(n) \sqcup \begin{pmatrix} -1 & & \emptyset \\ & 1 & \\ \emptyset & & \ddots & 1 \end{pmatrix} SO(n)$
↳ έχει δύο σύμπλοκα. (συνεκτικές συνιστώσες)

$O(n)$ κλειστή ή ανοιχτή;
$O(n)$ κλειστή και φραγμένη, άρα και συμπαγής
Αν $O(n)$ συνεκτική θα έπρεπε $O(n) = SO(n)$, αλλά η
$O(n)$ έχει 2 συνεκτικές συνιστώσες.

$O(n) \to \mathbb{R}^{n^2}$, $O(n) \subseteq M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n^2}$.

$A = (a_{ij}) \to (a_{11}, \ldots, a_{nn})$

$AA^t = I$

$a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2 = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$

$a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \dots + a_{ni}^2 = 1$ Δεν είναι γραμμικές καθώς έχουν τετράγωνα.

$(a_{i1} + a_{j1}) + \dots + (a_{in} + a_{jn}) = 0$ για $i \neq j$.

$(a_{1i} + a_{1j}) + \dots + (a_{ni} + a_{nj}) = 0$

Το σύνολο που θα πάρω είναι κλειστό, καθώς έχει ισότητες.

Κανένα από τα παραπάνω (οι πρώτες 2 ισότητες) δεν ξεπερνάει το 1, άρα είναι μέσα στην μπάλα.

Επομένως, είναι κλειστή και φραγμένη η $O(n)$.

Προφανώς, και η $SO(n)$ είναι κλειστή και φραγμένη.

Η $SO(n)$ ικανοποιεί και ότι η $\det = 1$.